Большая перемена

Э.Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ

НАУЧИСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Прокачай свои мозги!

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Издание 2-е, дополненное

Ростов-на-Дону
Феникс
2023

УДК 373.167.1:514
ББК 22.15я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Геометрия. Научись решать задачи различными способами. Прокачай свои мозги! Профильный уровень / Э.Н. Балаян. — Изд. 2-е, доп. — Ростов н/Д : Феникс, 2023. — 125 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-40243-6

Предлагаемая книга посвящена решению одной и той же задачи, но разными способами.

Количество приведенных способов — от 2 до 13, при этом используются оригинальные идеи и методы решений, которые способствуют повышению уровня и качества знаний, необходимых для успешной сдачи ЕГЭ по математике профильного уровня и победы на олимпиадах различного уровня.

Решение одной и той же задачи разными способами дает возможность полнее исследовать свойства геометрической фигуры и выявить наиболее простые решения.

Найденный способ решения в дальнейшем нередко используется при решении более трудных задач. При этом ученик развивает свои творческие возможности, формирует познавательный интерес, вырабатывает исследовательские навыки.

В книге три параграфа, из которых первые два содержат подробные решения и обоснования задач планиметрии. В конце второго параграфа приведены задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы.

В третьем параграфе приводятся избранные задачи на применение формул Пифагора, которые лишь упоминаются в учебнике геометрии.

Кроме того, в книге имеются краткие теоретические сведения по всему курсу геометрии 7–9 классов.

Книга адресована учащимся 7–11 классов, абитуриентам, учителям математики, репетиторам и всем любителям математики.

УДК 373.167.1:514
ISBN 978-5-222-40243-6 ББК 22.15я721

© Балаян Э.Н., 2023
© Оформление: ООО «Феникс», 2022

Посвящается моим невесткам —
Наталье Владимировне и Оксане Николаевне.

Лучше решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач — одним.

Д. Пойя

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большинство задач планиметрии можно решать различными способами. Сравнивая способы решения одной и той же задачи, нетрудно определить наиболее рациональное.

Вообще говоря, невозможно дать логически строгое общее определение наиболее рационального решения без сравнения с некоторым другим решением.

При сравнении нескольких способов решений необходимо учитывать объем знаний, применяемых при решении предложенной задачи.

Решение многих задач состоит не только из вычислений, но и включает необходимые пояснения и обоснования.

Может оказаться, что вычисления при одном способе решения проще, чем при другом, но обоснования и пояснения значительно сложнее.

Так как состав каждого класса неоднородный, то нужно тщательно относиться к оценке способов решений в зависимости от возможностей учеников. Надо всегда помнить, что главное — решить задачу, а потом уже рассматривать рациональность способа.

Стремление решать задачи рационально не должно противоречить пониманию решения. Не может быть одобрено решение, пусть даже и рациональное, которое вызывает затруднение у большинства учащихся данного класса.

При поиске того или иного решения следует учитывать и напряженность умственной деятельности, что не может быть объективным критерием, поскольку учащиеся для выполнения одной и той же работы тратят разное время и работают с различным напряжением.

Исходя из вышеизложенного, приходим к выводу о том, что в общем виде нельзя дать строгое определение наиболее рационального решения, которое мы могли бы применить в качестве критерия при оценке простоты решения. Сказывается также и отсутствие универсального алгоритма, овладение которым дало бы возможность найти рациональный способ решения любой задачи.

Следовательно, понятие рациональности решения необходимо раскрывать перед учащимися посредством разбора как можно большего числа конкретных задач.

Книга состоит из трех параграфов, включающих наиболее важные темы школьного курса математики. Параграфы содержат достаточное количество задач с решениями и задачи для самостоятельного решения, помещенные в конце второго параграфа.

Количество различных способов решения одной и той же задачи варьируется от двух до тринадцати.

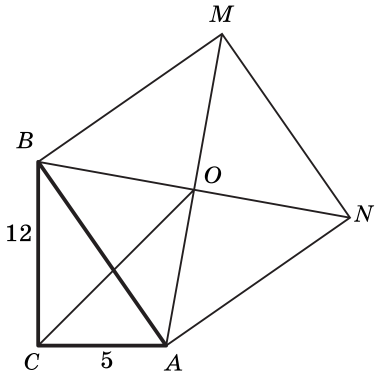
Третий параграф содержит авторские задачи на применение формул Пифагора, вызывающие повышенный интерес у всех любителей математики.

Для удобства пользования книгой приводятся краткие теоретические сведения по курсу планиметрии 7–9 классов, сопровождаемые определениями, основными свойствами и необходимыми справочными материалами.

§ 1. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Задачи с решениями

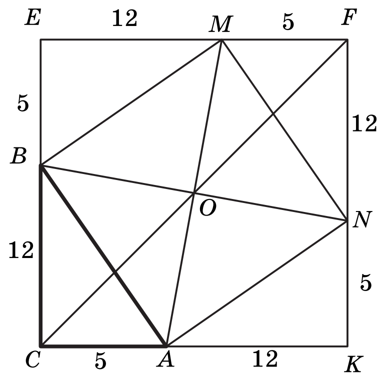
Пример 1. Найти расстояние от вершины прямого угла треугольника с катетами 5 и 12 до центра квадрата, построенного вне треугольника на его гипотенузе.



Решение.

I способ

Построим квадрат $CEFK$. Тогда искомое расстояние CO равно половине диагонали CF квадрата $CEFK$, где $CK = 17$ — длина стороны квадрата $CEFK$.



Из ΔCEF, где $CE = EF = 17$, по теореме Пифагора, имеем $CF=\sqrt{17^2+17^2}=\sqrt{2\cdot 17^2}=$ $=17\sqrt{2}$, тогда $CO=\dfrac{1}{2}CF=\dfrac{17\sqrt{2}}{2}$.

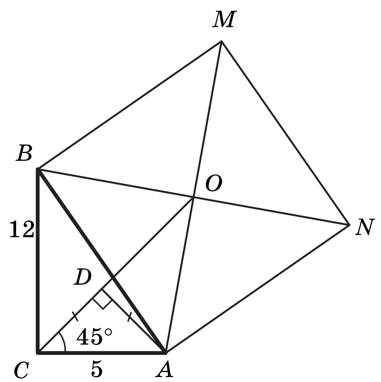
Ответ: $\dfrac{17\sqrt{2}}{2}$.

II способ

Из точки A опустим перпендикуляр AD к прямой CO. Поскольку $CEFK$ — квадрат, то CF — биссектриса $\angle ECK$, тогда $\angle ACO = 45°$.

Значит, $\angle CAD = 90° - 45° = 45°$, т. е. ΔACD — равнобедренный и прямоугольный.

$CD=AC\cos 45°=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$.



Найдем OD из ΔAOD: $OD=\sqrt{AO^2-AD^2}$, где $AO=\dfrac{1}{2}AM=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+BM^2}=$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2+AB^2}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}$.

Из ΔABC $AB=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$, следовательно, $AO=\dfrac{13\sqrt{2}}{2}$.

Искомое расстояние $CO = CD + OD$,

$$OD=\sqrt{\left(\frac{13\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{2}-\frac{25}{2}}=\sqrt{\frac{144}{2}}=\frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $CO=\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{2}}=\frac{17}{\sqrt{2}}=\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

III способ

Из ΔAOC, по теореме синусов, имеем (см. рис. к II способу):

$$\frac{CO}{\sin\angle OAC}=\frac{AC}{\sin\angle AOC},\text{ откуда } CO=\frac{AC\sin\angle OAC}{\sin\angle AOC}.$$

Но $\sin\angle OAC = \sin(45^\circ + \angle OAD) = \sin 45^\circ \cdot \cos\angle OAD +$
$+ \cos 45^\circ \cdot \sin\angle OAD = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\angle OAD + \sin\angle OAD) =$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{AD}{AO}+\frac{OD}{AO}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{AD+OD}{AO}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{12}{\sqrt{2}}}{\frac{13}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{17}{13}=\frac{17}{13\sqrt{2}}.$$

Так как $\angle ACB = \angle AOB = 90^\circ$, то вокруг четырехугольника $AOBC$ можно описать окружность. Тогда $\angle AOC = \angle ABC$ (см. рис. к II способу) как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AC.

Из ΔABC имеем $\sin\angle B=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{13}$, тогда

$$CO=5\cdot\frac{17}{13\sqrt{2}}:\frac{5}{13}=\frac{5\cdot 17\cdot 13}{13\sqrt{2}\cdot 5}=\frac{17}{\sqrt{2}}=\frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

IV способ

По теореме косинусов из ΔAOC (см. II способ) имеем:
$CO^2 = AC^2 + AO^2 - 2AC \cdot AO \cdot \cos\angle AOC$.

Так как $\sin\angle OAC=\frac{17}{13\sqrt{2}}$ (см. III способ), то

$$\cos\angle OAC=-\sqrt{1-\left(\frac{17}{13\sqrt{2}}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{289}{338}}=-\sqrt{\frac{49}{2\cdot 169}}=\frac{-7}{13\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $CO^2 = 25 + \frac{169}{2} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{13}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{13\sqrt{2}} = 25 + \frac{169}{2} + 35 =$

$= \frac{169}{2} + 60 = \frac{289}{2}$, откуда $CO = \frac{17}{\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

Замечание. $90° < \angle OAC < 180°$, тогда $\cos \angle OAC < 0$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

V способ

Из ΔAOC по следствию из теоремы синусов (см. рис. к II способу) имеем $\frac{CO}{\sin \angle OAC} = 2R = AB = 13$, откуда $CO = 13 \sin \angle OAC$, где

$\sin \angle OAC = \frac{17}{13\sqrt{2}}$ (см. III способ).

Следовательно, $CO = 13 \cdot \frac{17}{13\sqrt{2}} = \frac{17}{\sqrt{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

VI способ

$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot AC \cdot \sin \angle OAC$ (см. рис. к I способу).

С другой стороны, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} AO \cdot OC \cdot \sin \angle AOC$.

Значит, $\frac{1}{2} AO \cdot OC \cdot \sin \angle AOC = \frac{1}{2} AO \cdot AC \cdot \sin \angle AOC$, откуда

$OC = \frac{AC \cdot \sin \angle OAC}{\sin \angle AOC} = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ (см. III способ).

Ответ: $\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

VII способ

Так как $\angle ACB = 90°$ и $\angle AOB = 90°$, то $\angle ACB + \angle AOB = 180°$.

Значит, около четырехугольника $AOBC$ можно описать окружность. По теореме Птолемея имеем

$AB \cdot CO = AC \cdot BO + BC \cdot AO$, где $AB = 13$, $AC = 5$,

$BO = AO = \frac{13\sqrt{2}}{2}$ (см. II способ), $BC = 12$, $AO = \frac{13\sqrt{2}}{2}$.

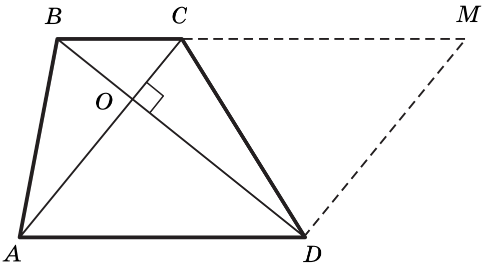
§ 2. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Задачи с решениями

Пример 19. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD длиной 9 и 12 взаимно перпендикулярны. Найти длину средней линии трапеции.

Решение.

I способ



Из точки D проведем прямую параллельно диагонали AC до пересечения с продолжением BC в точке M.

Тогда $ACMD$ — параллелограмм (по построению), $DM = AC = 9$.

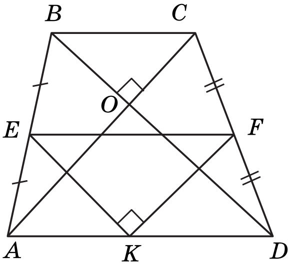
Так как $AC \perp BD$ (по условию) и $AC \parallel DM$, то $BD \perp DM$, т. е. ΔBDM — прямоугольный.

По теореме Пифагора $BM = \sqrt{BD^2 + DM^2}$, или $BM = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$.

Пусть l — длина средней линии трапеции, тогда $l = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(CM + BC) = \frac{1}{2}BM = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

II способ



Пусть $EF = l$ — длина средней линии трапеции. Проведем $EK \parallel BD$ и соединим точки K и F.

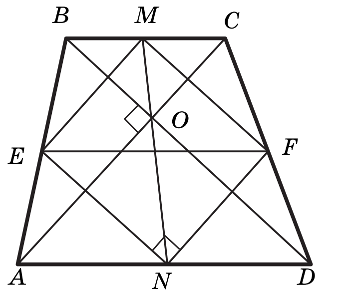
Заметим, что FK — средняя линия ΔACD, тогда $EF = \frac{1}{2}AC = 4{,}5$.

Аналогично EK — средняя линия ΔABD, т. е. $EK = \frac{1}{2}BD = 6$.

Так как $\angle EKF = \angle AOD$, то ΔEFK — прямоугольный. Следовательно, $EF = \sqrt{4{,}5^2 + 6^2} = \sqrt{20{,}25 + 36} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

III способ



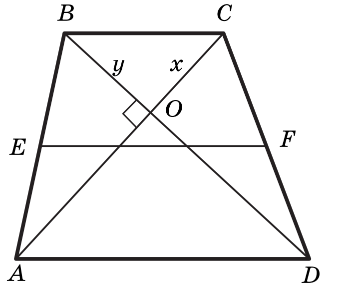
Соединим середины сторон трапеции $ABCD$.

Заметим, что $MENF$ — параллелограмм с прямым углом, т. е. прямоугольник, где $MF = EN = \frac{1}{2}BD = 6$ и $ME = FN = \frac{1}{2}AC = 4{,}5$.

Кроме того, $EF = MN = 7{,}5$ (см. II способ).

Ответ: 7,5.

IV способ



Пусть $OC = x$, $OB = y$, тогда $AO = 9 - x$, $DO = 12 - y$.

Заметим, что $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ (по двум углам).

Тогда получим $\frac{x}{9-x} = \frac{y}{12-y}$, или $12x - xy = 9y - xy$, или $12x = 9y$, $y = \frac{4}{3}x$.

Из прямоугольного ΔBOC имеем

$$BC = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9}x^2} = \frac{5}{3}x.$$

Аналогично из подобия ΔBOC и ΔAOD находим $\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{OA}$, или $\frac{\frac{5}{3}x}{AD} = \frac{x}{9-x}$, откуда $AD = \frac{5}{3}\cdot(9-x) = 15 - \frac{5}{3}x$.

Следовательно, $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}\left(15 - \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}x\right) = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

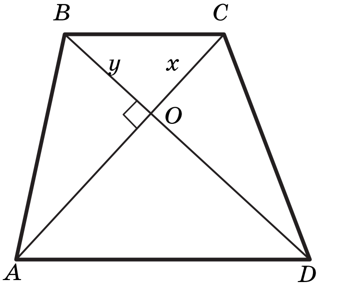
Ответ: 7,5.

V способ

Пусть $l = \frac{AD + BC}{2}$ — средняя линия.

Пусть $OC = x$, $OB = y$, тогда $AO = 9 - x$, $DO = 12 - y$ (см. IV способ).

$\frac{x}{9-x} = \frac{y}{12-y}$, откуда $y = \frac{4}{3}x$, $BC = \frac{5}{3}x$.



Из ΔAOB $AD=\sqrt{AO^2+DO^2}=\sqrt{(9-x)^2+(12-y)^2}=$

$=\sqrt{(9-x)^2+\left(12-\frac{4}{3}x\right)^2}$, тогда $\sqrt{(9-x)^2+\left(12-\frac{4}{3}x\right)^2}+\frac{5}{3}x=2l$, или

$\sqrt{(9-x)^2+\left(12-\frac{4}{3}x\right)^2}=2l-\frac{5}{3}x.$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$(9-x)^2+\left(12-\frac{4}{3}x\right)^2=\left(2l-\frac{5}{3}x\right)^2$, или $81-18x+x^2+144-$

$-32x+\frac{16}{9}x^2=4l^2-\frac{20}{3}lx+\frac{25}{9}x^2$, $4l^2-\frac{20}{3}lx+50x-225=0.$

Полученное уравнение рассматриваем как квадратное относительно l:

$\frac{D}{4}=\left(\frac{10}{3}x\right)^2-4(50x-225)=100\left(\frac{1}{3}x-3\right)^2,$

$l=\frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}x\pm10\left(\frac{1}{3}x-3\right)\right)$, откуда

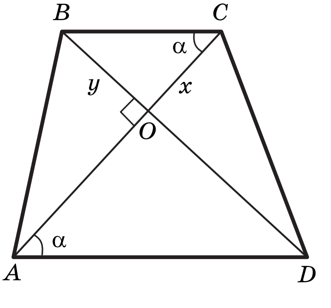
$l_1=\frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}x+10\left(\frac{1}{3}x-3\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{20}{3}x-30\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}x-3\right),$

$l_2=\frac{1}{4}\left(\frac{10}{3}x-\frac{10}{3}x+30\right)=\frac{1}{4}\cdot30=\frac{15}{2}=7{,}5.$

Поскольку $x=OC<\frac{1}{2}AC$, то корень l_1 не подходит. Значит, длина средней линии $l=7{,}5$.

Ответ: 7,5.

VI способ



Из подобия ΔBOC и ΔAOD (см. IV способ) имеем $\frac{x}{9-x}=\frac{y}{12-y}$, откуда $y=\frac{4}{3}x$.

Пусть $\angle OAD=\alpha$.

Заметим, что $\angle OAD=\angle OCB=\alpha$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC).

Из ΔBOC имеем $\operatorname{tg}\alpha=\frac{BO}{CO}=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}x:x=\frac{4}{3}.$

Известно, что $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, или $1+\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, или $\cos^2\alpha=\dfrac{9}{25}$, откуда $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

Так как $\cos\alpha=\dfrac{OC}{BC}$, то $BC=\dfrac{OC}{\cos\alpha}=\dfrac{5}{3}x$.

Из ΔAOD имеем $\cos\alpha=\dfrac{AO}{AD}\Rightarrow AD=\dfrac{AO}{\cos\alpha}$, или $AD=(9-x)\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}(9-x)$.

Следовательно, $l=\dfrac{AD+BC}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{3}(9-x)+\dfrac{5}{3}x\right)=$

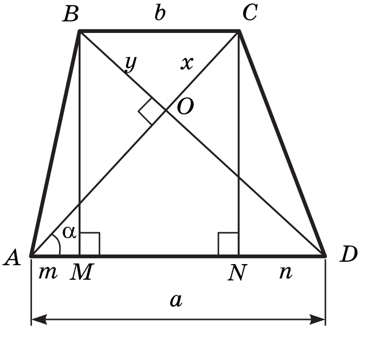
$=\dfrac{1}{2}\left(15-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{5}{3}x\right)=\dfrac{15}{2}=7{,}5.$

Ответ: 7,5.

VII способ

Проведем высоты трапеций BM и CN.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, $AM = m$, $ND = n$, $BM = CN = h$, $y=\dfrac{4}{3}x$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$ (см. VI способ).



Из ΔACN и ΔBMD имеем

$AN=\sqrt{AC^2-CN^2}=\sqrt{81-h^2}$;

$MD=\sqrt{BD^2-BM^2}=\sqrt{144-h^2}$.

Складывая полученные равенства, находим $AN+MD=\sqrt{81-h^2}+\sqrt{144-h^2}=$
$=(AM+MN)+(MN+ND)=m+b+b+n=$
$=a+b$, где $m+b+n=AD=a$.

Следовательно, $l=\dfrac{1}{2}(a+b)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{81-h^2}+\sqrt{144-h^2}\right)$.

Из ΔACN имеем $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{CN}{AN}=\dfrac{h}{\sqrt{81-h^2}}=\dfrac{4}{3}$, или $\dfrac{h^2}{81-h^2}=\dfrac{16}{9}$,

$9h^2 = 81\cdot 16 - 16h^2$, или $25h^2 = 81\cdot 16$, или $5h = 9\cdot 4$, откуда $h=\dfrac{36}{5}$.

Так как $81-h^2=9^2-\left(\dfrac{36}{5}\right)^2=\left(9-\dfrac{36}{5}\right)\left(9+\dfrac{36}{5}\right)=$

$=\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{81}{5}$, то $\sqrt{81-h^2}=\dfrac{3\cdot 9}{5}=\dfrac{27}{5}$.

§ 3. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Некоторые применения формул Пифагора

Пример 1. Найти последовательность натуральных чисел k, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+k=u^2, \\ x^2-k=v^2 \end{cases}$ имеет целочисленные решения.

Решение.

Складывая и вычитая почленно уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} 2x^2=u^2+v^2, & (1) \\ 2k=u^2-v^2. & (2) \end{cases}$$

Из (1) $\Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2}(u^2+v^2) = \left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2$. $\qquad (3)$

Заметим, что числа, входящие в выражение (3), образуют тройку пифагоровых чисел, т. е. числа x, $\dfrac{u+v}{2}$ и $\dfrac{u-v}{2}$ могут служить длинами сторон некоторого прямоугольного треугольника, где $\dfrac{u+v}{2}$ и $\dfrac{u-v}{2}$ являются «катетами», а x — «гипотенузой». Следовательно, к этим числам можно применить формулы Пифагора:

$$x = a^2 + b^2, \qquad (4)$$

$$\frac{u+v}{2} = 2ab, \qquad (5)$$

$$\frac{u-v}{2} = a^2 - b^2, \qquad (6)$$

где $a > b$, $(a;\, b) = 1$.

Далее заметим, что из «катетов» $\dfrac{u+v}{2}$ и $\dfrac{u-v}{2}$ — один четный, а другой нечетный, поэтому число (3) нечетное, а значит, нечетна и «гипотенуза» x.

Замечание 1. Доказательство того, что формулы (4) – (6) являются пифагоровыми, имеется в ряде популярных книг, например «Старинные задачи» Д. Чистякова, «Приглашение в теорию чисел» О. Оре, «Занимательная алгебра» Я.И. Перельмана и др.

Из (5) и (6) $\Rightarrow u^2 - v^2 = 8ab\,(a^2 - b^2)$. $\qquad (7)$

Сравнивая (2) и (7), получим

$$2k = 8ab(a^2 - b^2),\text{ или } k = 4ab(a^2 - b^2). \qquad (8)$$

Наименьшее значение для k мы получим, если положить $a = 2$, $b = 1$, тогда $k = 24$, $x = 5$, $x^2 = 25$.

Найденное число 25 является решением данной системы при наименьшем значении $k = 24$.

И действительно, $5^2 + 24 = 7^2$, $5^2 - 24 = 1^2$.

Последующие значения для k мы найдем, полагая $a = 3$, $b = 2$, тогда $k = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (3^2 - 2^2) = 120$, $x = 3^2 + 2^2 = 13$, $x^2 = 13^2$, следовательно, $13^2 + 120 = 17^2$ и $13^2 - 120 = 7^2$.

Итак, чтобы найти последовательность целых чисел k, при которой данная система имеет решение, естественно положить $a = p + 1$, $b = p$, где $p \in N$, тогда формула (8) примет вид:

$$k = 4(p + 1) \cdot p \cdot ((p + 1)^2 - p^2) = 4p(p + 1)(2p + 1) = 2p(2p + 1)(2p + 2).$$

$$k = 2p(2p + 1)(2p + 2). \qquad (9)$$

Выходит, что число k представляет собой произведение трех последовательных чисел вида $2 \cdot 3 \cdot 4$, $4 \cdot 5 \cdot 6$, ... $2p \cdot (2p + 1) \cdot (2p + 2)$.

Тогда из (4) $\Rightarrow x = a^2 + b^2 = (p + 1)^2 + p^2$.

Итак, $k = 2p(2p + 1)(2p + 2)$, $x = (p + 1)^2 + p^2$.

Например, при $p = 1$ и $p = 2$ получим рассмотренные нами два случая.

Пусть $p = 100$, тогда $k = 200 \cdot 201 \cdot 202 = 8120400$,

$x = 101^2 + 100^2 = 20201$, $x^2 = 408080401$,

$x^2 - k = 416200801 = 20401^2$, $x^2 - k = 399960001 = 19999^2$.

Замечание 2. Нетрудно заметить, что тройка чисел v^2, x^2, u^2 образует возрастающую арифметическую прогрессию с разностью k.

И действительно, $x^2 - v^2 = u^2 - x^2 = k \Rightarrow$ по определению арифметической прогрессии и из условия задачи; $x^2 = \dfrac{1}{2}(u^2 + v^2) \Rightarrow$ из основного свойства арифметической прогрессии.

Замечание 3. Известно, что $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + p^2 = \dfrac{1}{2}p(p + 1)(2p + 1)$ (см., например, *Соминский И.С.* Элементарная алгебра (дополнительный курс). — М.: Наука, 1967).

Тогда $p(p + 1)(2p + 1) = 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + p^2)$.

Сравнивая с (9), получим

$k = 4p(p + 1)(2p + 1) = 24 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + p^2)$.

Итак, решение исходной системы определяется по формулам

$x = 2p(p+1)+1$, $k = 2p(2p+1)(2p+2)$, откуда ⇒, что наименьшее значение k достигается при $p = 1$, $k = 24$.

Ответ: $k = 2p(2p+1)(2p+2)$, где $p \geq 1$.

Пример 2. Найти хотя бы одну тройку (x, y, z) целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 = z^{13}$.

Решение.

Идея решения диофантова уравнения вида

$$x^2 + y^2 = z^n,$$

где $n \geq 2$ заключается в применении формулы бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n \ldots .$$

Если $n = 13$, то пригодны формулы:

$x = a^{13} - 78a^{11}b^2 + 715a^9b^4 - 1716a^7b^6 + 1287a^5b^8 - 286a^3b^{10} + 13ab^{12}$;

$y = 13a^{12}b - 286a^{10}b^3 + 1287a^8b^5 - 1716a^6b^7 + 715a^4b^9 - 78a^2b^{11} + b^{13}$,

$z = a^2 + b^2$.

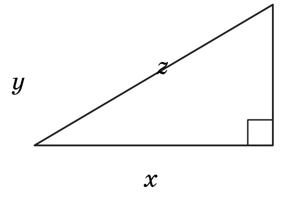
С помощью этих формул можно получить сколько угодно троек чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Например, при $a = 2$, $b = 1$ получим $x = 33802$, $y = 8839$, $z = 5$, тогда $33802^2 + 8839^2 = 5^{13}$.

Ответ: например, $x = 33802$, $y = 8839$, $z = 5$.

Замечание. Представляет интерес общее решение уравнения вида $x^2 + y^2 = z^n$, где $n \geq 2$.

Пример 3. Каковы должны быть стороны прямоугольного треугольника, чтобы радиус вписанной окружности принимал заданное целочисленное значение?



Решение.

Известно, что между сторонами прямоугольного треугольника существует зависимость.

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv, \\ z = u^2 + v^2; \end{cases} \qquad (1)$$

$$u > v.$$

Формулы (1) называются формулами Пифагора.

Кроме того, в прямоугольном треугольнике

$$r = \frac{x+y-z}{2},$$

где r — радиус вписанной окружности.

Учитывая (1), мы имеем:

$$r = \frac{1}{2}(u^2 - v^2 + 2uv - u^2 - v^2) = uv - v^2, \text{ или } r = v\,(u - v). \quad (2)$$

Пусть $r = k$ принимает заданное целочисленное значение, тогда (2) примет вид

$$v\,(u - v) = k. \quad (3)$$

Равенство (3) выполняется, например, если $v = 1$, тогда $u - v = k$, т. е. $u = k + 1$, значит,

$$x = (k + 1)^2 - 1,$$
$$y = 2\,(k + 1),$$
$$z = (k + 1)^2 + 1,$$
$$\text{где } k \geq 1. \quad (4)$$

С помощью формул (4) может быть получено сколько угодно троек чисел (x, y, z), удовлетворяющих условию задачи.

Пусть, например, $r = k = 13$, тогда

$x = (13 + 1)^2 - 1 = 195,$

$y = 2 \cdot (13 + 1) = 28,$

$z = (13 + 1)^2 + 1 = 197.$

В этом случае получим тройку чисел: $195^2 + 28^2 = 197^2$ и т. д.

Ответ: $x = (k + 1)^2 - 1,$

$y = 2(k + 1),$

$z = (k + 1)^2 + 1$, где $k \geq 1$.

Пример 4. Найти прямоугольные треугольники, у которых гипотенуза в сумме с одним из катетов дает квадрат другого катета.

Решение.

Пусть c — гипотенуза, a и b — катеты прямоугольного треугольника. Тогда согласно условию имеем:

$$a + c = b^2 \text{ (или } b + c = a^2).$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, следовательно, получим систему:

$$\begin{cases} a + c = b^2, \\ a^2 + b^2 = c^2; \end{cases} \quad \begin{cases} c + a = b^2, \\ c^2 - a^2 = b^2; \end{cases} \Rightarrow c + a = c^2 - a^2,$$

$$c + a = (c - a)(c + a),\ c + a \neq 0, \text{ тогда } c - a = 1. \quad (1)$$

Из (1) $\Rightarrow$, что c и a — последовательные натуральные числа. Для нахождения c и a решим систему:

$$\begin{cases} c + a = b^2, \\ c - a = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2c = b^2 + 1, \\ 2a = b^2 - 1; \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{1}{2}\left(b^2 + 1\right), \\ a = \frac{1}{2}\left(b^2 - 1\right). \end{cases}$$

Из соотношения $c = \frac{1}{2}(b^2 + 1) \Rightarrow$, что c будет целым числом, если b будет нечетным, причем $b > 1$.

Полагая $b = 3$, имеем $c = \frac{1}{2}(3^2 + 1) = 5$, $a = 4$, и мы получаем «египетский треугольник», стороны которого удовлетворяют условию задачи, так как $4 + 5 = 3^2$.

Если $b = 5$, $c = 13$, $a = 12$, тогда $12 + 13 = 5^2$ и т. д.

Полагая $b = 2k + 1$, получим: $\begin{cases} a = 2k(k+1), \\ c = k^2 + (k+1)^2, \\ b = 2k + 1. \end{cases}$ где $k > 0$,

Замечание. Эти формулы можно получить и из формул Пифагора (см. задачу № 1).

Пример 5. Найти 3 целых числа, образующих арифметическую прогрессию, при которой сумма двух любых из этих трех чисел представляет собой квадрат.

Решение.

Условие этой задачи заимствовано из книги *Дьюдени Г.* 520 головоломок. — М.: Мир, 1975 (№ 197).

Пусть x_1, x_2, x_3 — искомая тройка чисел, образующих арифметическую прогрессию.

Согласно условию имеем:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a^2, \\ x_1 + x_3 &= b^2, \\ x_2 + x_3 &= c^2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$. (2)

Из (1) $\Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) = a^2 + b^2 + c^2$, или

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

§ 1. Треугольники 5
Задачи с решениями 5

§ 2. Четырехугольники 51
Задачи с решениями 51
Задачи для самостоятельного решения 81
Ответы 88

§ 3. Избранные задачи 89
Некоторые применения формул Пифагора 89

Краткие теоретические сведения по курсу планиметрии 7–9 классов 97
1. Углы 97
2. Многоугольник 98
3. Правильные многоугольники 99
4. Треугольник 100
5. Признаки равенства треугольников 102
6. Неравенства треугольника 103
7. Определение вида треугольника по его сторонам 103
8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства) 103
9. Признаки равенства прямоугольных треугольников 103
10. Четыре замечательные точки треугольника 105
11. Произвольный треугольник 106
12. Теорема Чевы 107
13. Теорема Менелая 107
14. Теорема синусов 107
15. Теорема косинусов 108
16. Площадь треугольника 108
17. Равносторонний (правильный) треугольник 108
18. Подобные треугольники 108
19. Признаки подобия треугольников 109
20. Четырехугольник 110
21. Параллелограмм 111
22. Трапеция 112
23. Прямоугольник 113
24. Ромб 113
25. Квадрат 114
26. Окружность 114
27. Свойства касательных к окружности 115
28. Окружность и треугольник 115
29. Окружность и четырехугольник 116

30. Углы и окружность 116
31. Метрические соотношения в окружности 118
32. Длина окружности. Площадь круга и его частей 118
33. Понятие вектора 119
34. Равенство векторов 119
35. Координаты вектора 119
36. Действия над векторами 120
37. Скалярное произведение векторов 121
38. Скалярное произведение в координатах 121
39. Свойства скалярного произведения векторов 121
40. Уравнение окружности 121
41. Уравнение прямой 122

Литература 123

0+

Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ. НАУЧИСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Прокачай свои мозги!

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Ответственный редактор *С. Осташов*

Формат 70 × 100 1/16. Бумага тип. №2.
Печать офсетная. Тираж 2500 экз.
Заказ №

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.

Изготовлено в России. Дата изготовления: 05.2023.
Срок годности не ограничен

Отпечатано в ООО «Принт-М»
142300, Россия, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов 1 /
Корпус Производственный Б, помещение 279, этаж 4.