Большая перемена

Э. Н. Балаян

РЕПЕТИТОР ПО ГЕОМЕТРИИ

для 7–9 классов

- ***Подготовка к ОГЭ и ЕГЭ***
- ***Краткие теоретические сведения***
- ***300 задач с решениями***
- ***Более 1200 задач для самостоятельного решения***

Издание пятое

Ростов-на-Дону
Феникс
2024

УДК 373.167.1:514
ББК 22.14я72
КТК 444
Б20

Балаян Э. Н.

Б20 Репетитор по геометрии для 7–9 классов / Э. Н. Балаян. — Изд. 5-е. — Ростов н/Д : Феникс, 2024. — 359 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-41413-2

Предлагаемая книга написана на основе действующей программы по геометрии для 7–9 классов общеобразовательных школ, гимназий, лицеев. Она содержит более 1500 задач, из которых 300 даны с подробными решениями и обоснованиями.

Для удобства пользования книгой приводятся краткие теоретические сведения по курсу планиметрии, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами.

Каждый параграф содержит образцы решения задач и задачи для самостоятельного решения. В конце книги приводятся ответы ко всем задачам на вычисление.

Репетитор предназначен для самостоятельной подготовки к ОГЭ, ЕГЭ, а также к урокам геометрии. Рекомендован старшеклассникам и абитуриентам общеобразовательных школ, гимназий, лицеев, а также студентам педвузов и репетиторам.

ISBN 978-5-222-41413-2

УДК 373.167.1:514
ББК 22.14я72

Посвящается светлой памяти моих учителей:
Льва Семеновича Марковича,
Нонны Владимировны Хуриновой,
Ефима Лазаревича Розенблюма.

Предисловие

Предлагаемая вниманию читателя книга предназначена для самостоятельной подготовки к урокам, а также для успешной сдачи ОГЭ и ЕГЭ.

Не секрет, что решение геометрических задач вызывает у учеников большие трудности, тем более что геометрия как предмет является объективно более сложной для изучения, чем алгебра.

Цель настоящей книги — помочь ученикам эффективно подготовиться к урокам и успешной сдаче ОГЭ и ЕГЭ.

Учитывая различный уровень подготовки каждого ученика и их способности к изучению предмета, автор счел необходимым разделить задачи на готовых чертежах для самостоятельного решения на две группы.

Задачи первой группы (группа «А») соответствуют заданиям среднего уровня сложности, а задачи второй группы (группа «Б») являются более сложными и соответствуют заданиям повышенного уровня сложности. Упражнения этой части могут быть использованы для организации индивидуальной работы на уроках с сильными учениками, на факультативных занятиях, олимпиадах, а также в работе математического кружка. Эти задачи дают возможность вести дифференцированное обучение учащихся. Трудные задачи отмечены знаком *, а наиболее трудные — **. Ко всем задачам даны ответы в конце книги.

Книга состоит из 12 глав, каждая из них содержит несколько параграфов, что дает возможность быстро найти нужную информацию.

В главе I содержатся краткие теоретические сведения и справочные материалы по курсу планиметрии 7–9 классов.

Во II–XII главах приводятся задачи с решениями и для самостоятельного решения на готовых чертежах, соответствующие основным темам программы геометрии 7–9 классов.

7 класс охватывает главы II–V, 8 — VI–IX, 9 — X–XII.

Отметим, что приступать к решению задач группы «Б» целесообразно при условии, что ученик в основном уже владеет навыками решения задач школьного курса геометрии (задач группы «А»).

В дополнение к этой книге и для основательной подготовки к ОГЭ и ЕГЭ автор рекомендует использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги: «Геометрия. Задачи для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ. 7–9 классы», 2020, «Репетитор по математике для старшеклассников и абитуриентов», 2020.

Глава I

Краткие теоретические сведения по курсу планиметрии 7–9 классов

1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в $90°$ называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

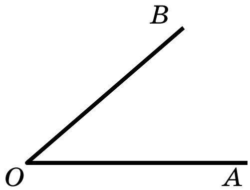


Рис. 1

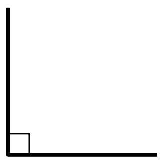


Рис. 2

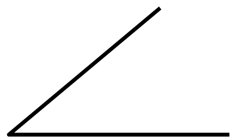


Рис. 3

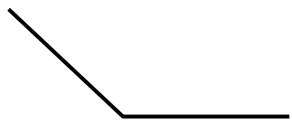


Рис. 4

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

Сумма смежных углов равна 180°.

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

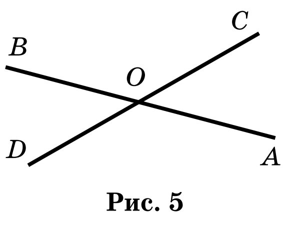


Рис. 5

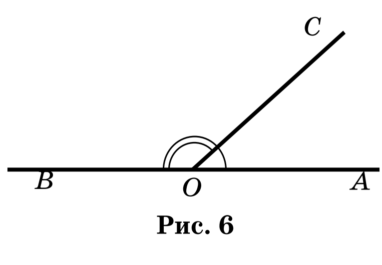


Рис. 6

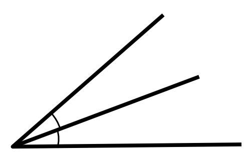


Рис. 7

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

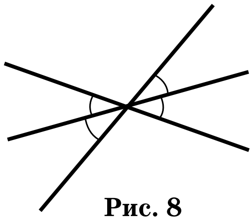


Рис. 8

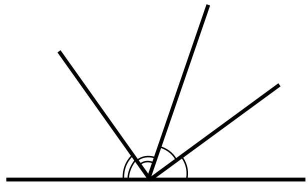


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

соответственные углы:

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;

внутренние накрест лежащие:

$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;

внешние накрест лежащие:

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;

внутренние односторонние:

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;

внешние односторонние:

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

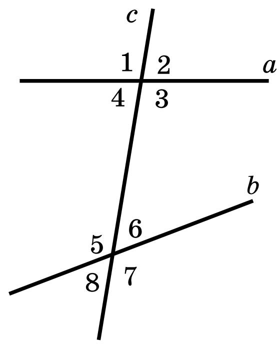


Рис. 10

2. Многоугольник

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ — углы; AB, BC, CD и т. д. — стороны; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + ... + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

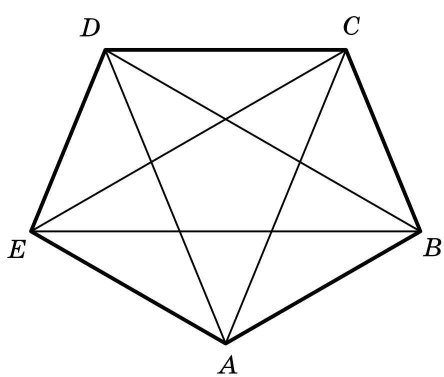


Рис. 11

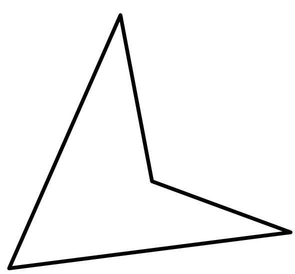


Рис. 12

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

3. В выпуклом n-угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n-угольник на $(n - 2)$ треугольников.

4. В выпуклом n-угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным.**

Свойства:

1. Каждый угол правильного n-угольника равен $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

2. Около правильного n-угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n-угольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4. Окружность, вписанная в правильный n-угольник, касается всех сторон n-угольника в их серединах.

5. Центр окружности, описанной около правильного n-угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n-угольник.

6. Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R, равна $a = 2R\sin\frac{180°}{n}$.

7. Длина стороны правильного n-угольника, описанного около окружности радиуса r, равна $a = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$.

4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

Точки A, B, C — **вершины** ΔABC.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — **углы.**

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c,\ \ BC = a,\ \ AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

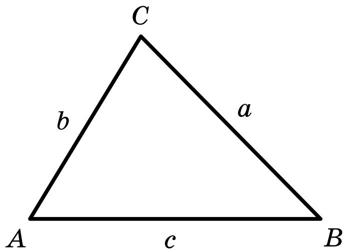


Рис. 13

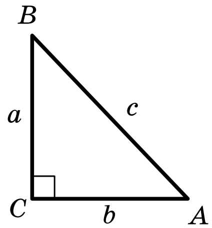


Рис. 14

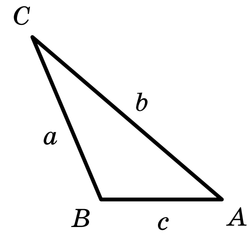


Рис. 15

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

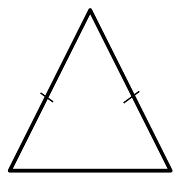


Рис. 16

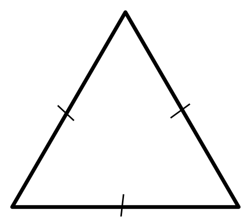


Рис. 17

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

Свойства равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.
4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

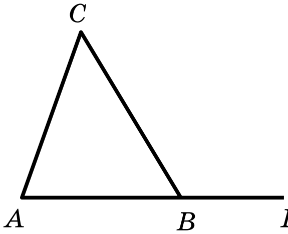


Рис. 18

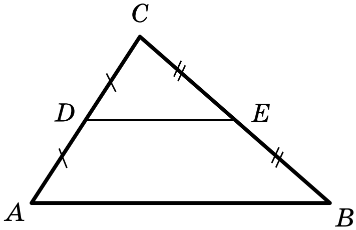


Рис. 19

5. Признаки равенства треугольников

I признак (*признак равенства по двум сторонам и углу между ними*)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

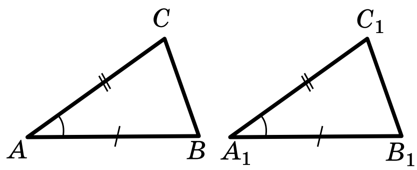


Рис. 20

II признак (*признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам*)

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

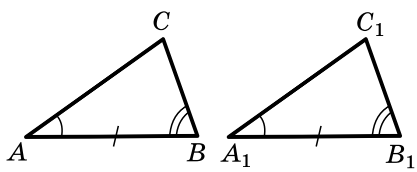


Рис. 21

III признак (*признак равенства по трем сторонам*)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

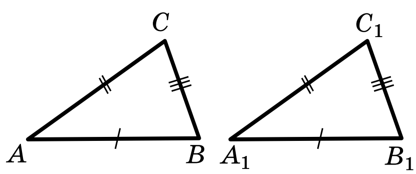


Рис. 22

6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b.$$

7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:
а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник — остроугольный;
б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник — тупоугольный;
в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник — прямоугольный.

8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90°.$$

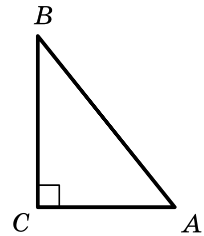


Рис. 23

2) Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

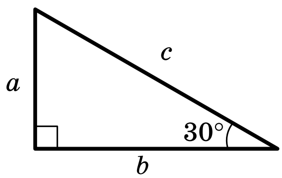


Рис. 24

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. **Если катеты** одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1.$$

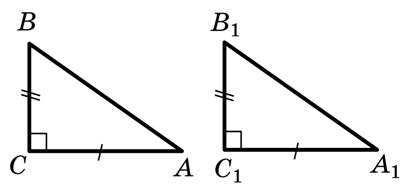


Рис. 25

2. **Если катет и прилежащий к нему острый угол** одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

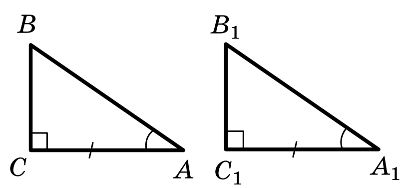


Рис. 26

3. **Если гипотенуза и острый угол** одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

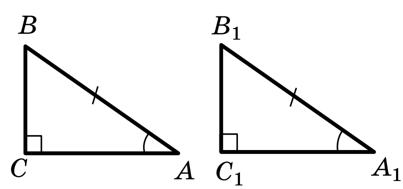


Рис. 27

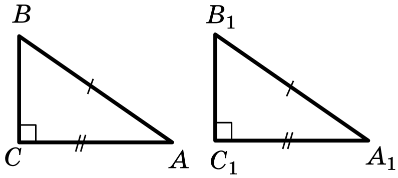


Рис. 28

4. **Если гипотенуза и катет** одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1.$$

10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:
1) точка пересечения медиан;
2) точка пересечения биссектрис;
3) точка пересечения высот (или их продолжений);
4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья — внутри.

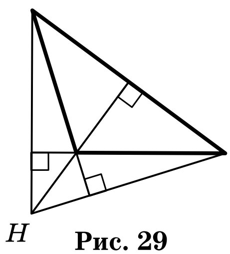


Рис. 29

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

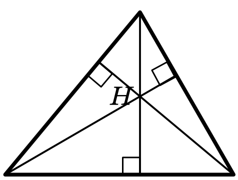


Рис. 30

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В *тупоугольном треугольнике* ортоцентр лежит вне треугольника. В *прямоугольном треугольнике* он совпадает с вершиной прямого угла.

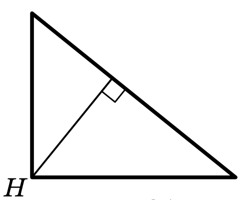


Рис. 31

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

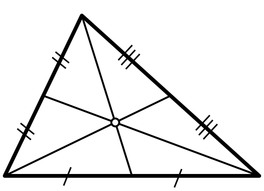


Рис. 32

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противолежащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

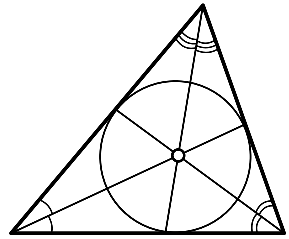


Рис. 33

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности.**

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в *остроугольном* (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — на **середине** гипотенузы.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

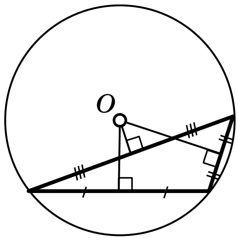


Рис. 34

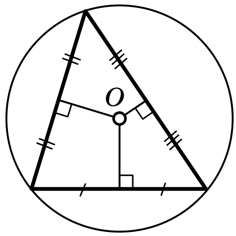


Рис. 35

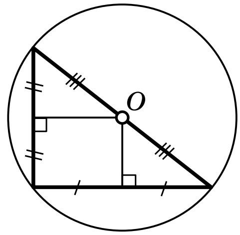


Рис. 36

11. Произвольный треугольник

1) Свойство биссектрисы (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

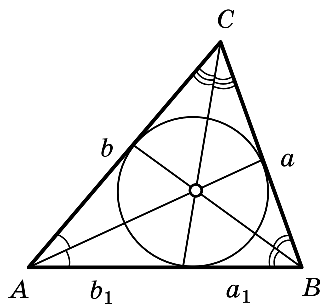


Рис. 37

2) Длина биссектрисы:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника;

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр;

h_c — высота, проведенная к стороне c.

5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

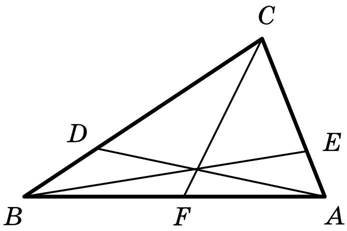


Рис. 38

12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE, AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

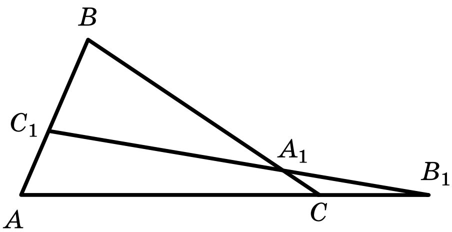


Рис. 39

13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC, AB и продолжении стороны AC ΔABC за точку C отмечены соответственно точки A_1, C_1 и B_1, лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \text{ (рис. 39).}$$

14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

16. Площадь треугольника

1) $S = \frac{1}{2} a h_a$;

2) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$;

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);

4) $S = p\, r$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;

5) $S = \frac{abc}{4R}$;

6) $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$.

17. Равносторонний (правильный) треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним (рис. 40).

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$;

$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

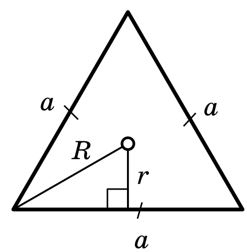


Рис. 40

18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

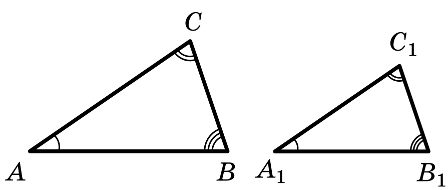


Рис. 41

AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1. \qquad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2, т. е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = k^2$.

19. Признаки подобия треугольников

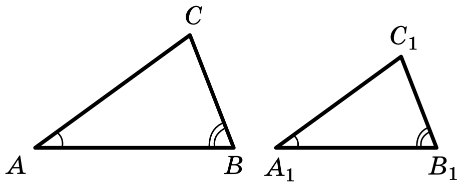


Рис. 42

I признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = A_1,\ \angle B = B_1.$$

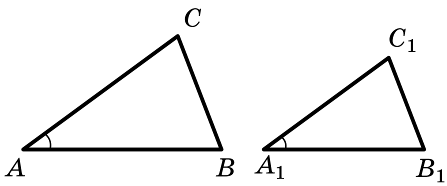


Рис. 43

II признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\angle A = \angle A_1,$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

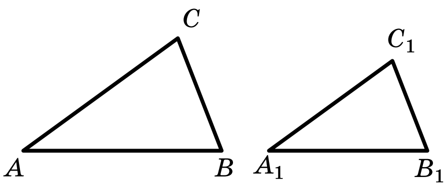


Рис. 44

III признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Площади подобных фигур (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, **площади кругов** относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

20. Четырехугольник

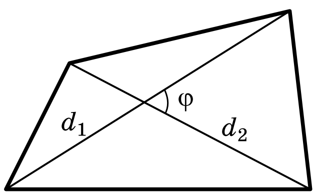


Рис. 45

1. **Произвольный выпуклый** (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi.$$

2. **Вписанный** (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°. Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1d_2 \text{ (теорема Птолемея).}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$$

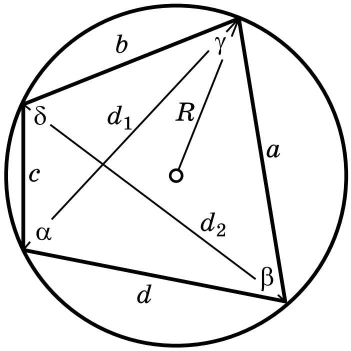


Рис. 46

3. **Описанный.**

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

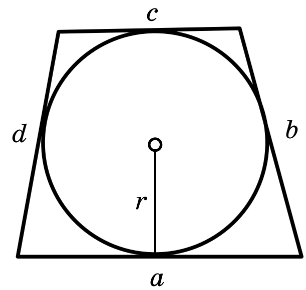


Рис. 47

21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

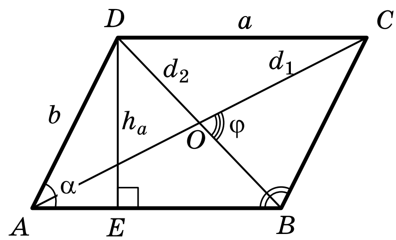


Рис. 48

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi \text{ — площадь параллелограмма.}$$

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$, $AD = BC$, $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ($\angle A + \angle B = 180°$ и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\Delta ADC = \Delta ABC$, $\Delta ABD = \Delta BCD$).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

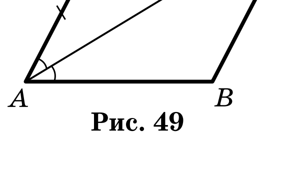


Рис. 49

Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel CD$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = BC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

22. Трапеция

a и b – основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 50).

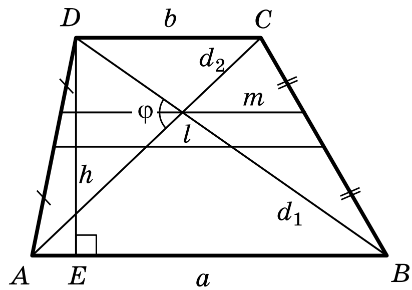


Рис. 50

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции.**

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$m \parallel a \parallel b$, $m = \dfrac{2ab}{a+b}$.

$\angle A + \angle D = 180°$; $\angle B + \angle C = 180°$.

$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin\varphi$ — площадь трапеции.

Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется **равнобедренной** (рис. 51).

$$AD = BC.$$

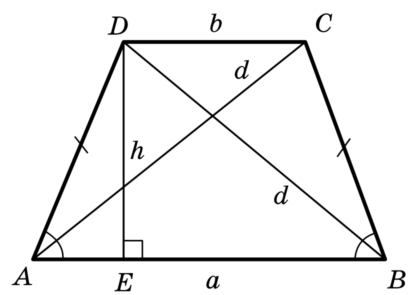


Рис. 51

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$AB + CD = 2AD$ (рис. 52).

$h = 2r$, где r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

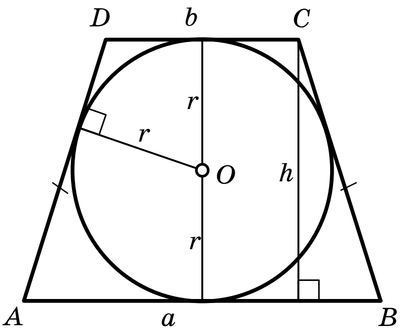


Рис. 52

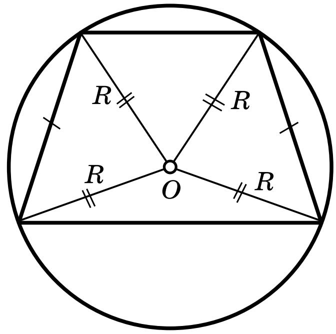


Рис. 53

Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется **прямоугольной** (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90°.$$

$$BE = CD = h$$

(высота трапеции).

$$AE = a - b.$$

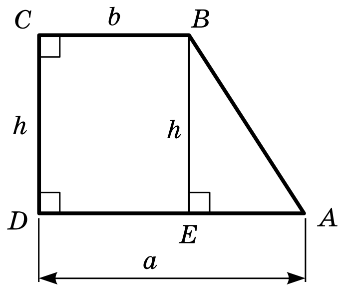


Рис. 54

23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, **у прямоугольника диагонали равны.**

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi.$$

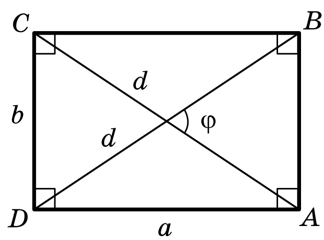


Рис. 55

24. Ромб

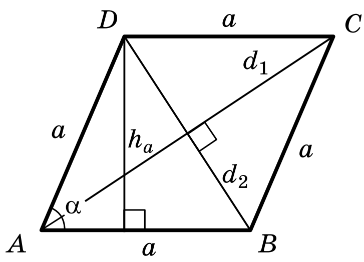


Рис. 56

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов $\angle A$ и $\angle C$; BD — биссектриса углов $\angle B$ и $\angle D$.

$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$.

$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ — площадь ромба.

25. Квадрат

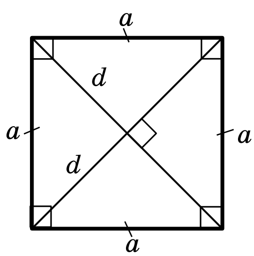


Рис. 57

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

26. Окружность

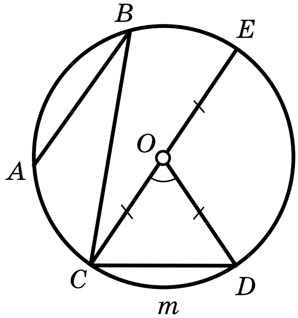


Рис. 58

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом.**

Обозначение: r или R.

На рисунке $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой.**

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром.**

AB, BC, CD и CE — хорды окружности; CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D.

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом.**

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом.**

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором.**

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральным** ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$).

27. Свойства касательных к окружности

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

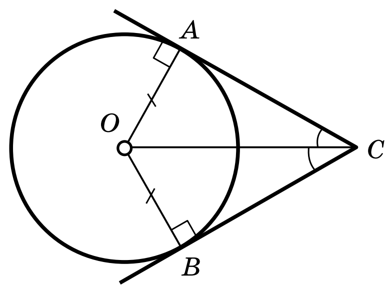


Рис. 59

28. Окружность и треугольник

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

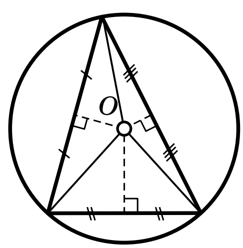


Рис. 60

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

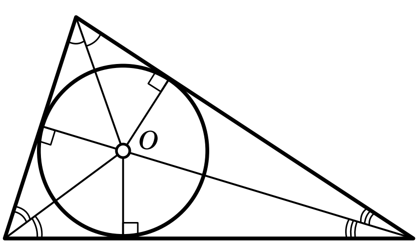


Рис. 61

29. Окружность и четырехугольник

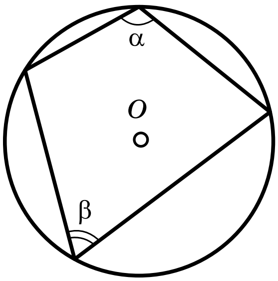


Рис. 62

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180°.$$

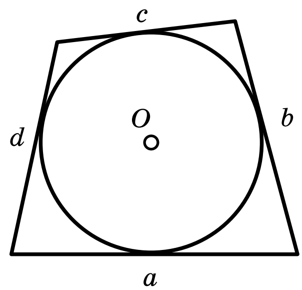


Рис. 63

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AmC.$$

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\cup BmC.$$

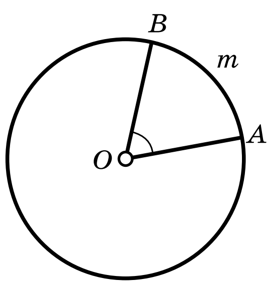


Рис. 64

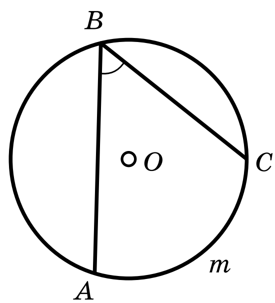


Рис. 65

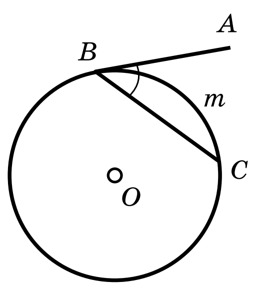


Рис. 66

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2}(\cup AmC + \cup BnD).$$

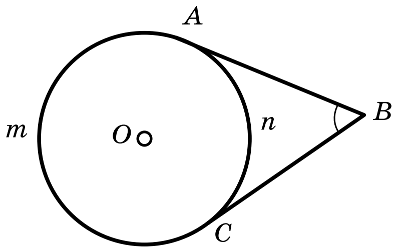


Рис. 67

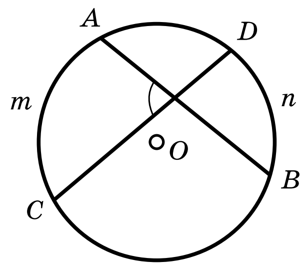


Рис. 68

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

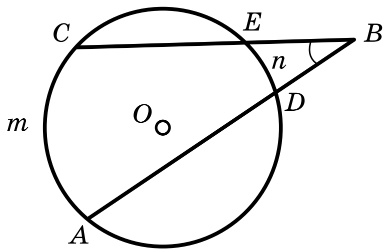


Рис. 69

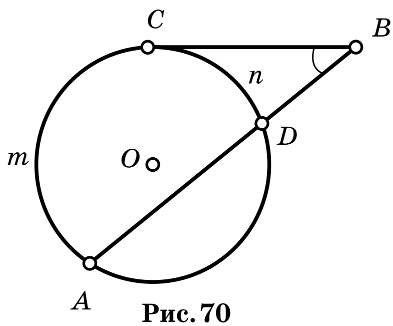


Рис. 70

31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то **произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой** (рис. 71).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC, то

$DB \cdot AB = EB \cdot CB$ (рис. 72).

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC, то **произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной** (рис. 73).

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

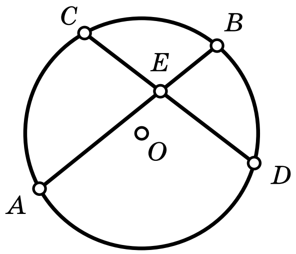


Рис. 71

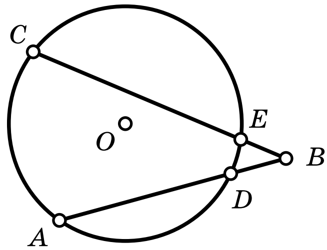


Рис. 72

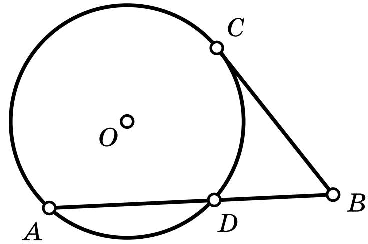


Рис. 73

32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$l = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi D^2 = \dfrac{1}{2}CR$ — площадь круга;

$\pi = \dfrac{C}{D} \approx 3{,}14$ — отношение длины окружности к ее диаметру;

$S_{\text{сект.}} = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$ — площадь сектора (рис. 74).

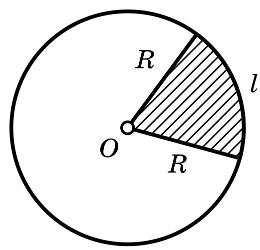


Рис. 74

33. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:

1) начальной точкой;
2) направлением;
3) длиной (модулем).

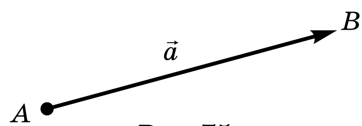


Рис. 75

Длиной (модулем) ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются **коллинеарными** (рис. 76).

Коллинеарные векторы:
$\vec{a}$, $\vec{m}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Неколлинеарные векторы:
$\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{ST}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{ST}$.

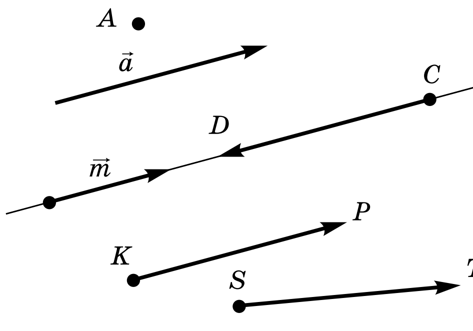


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются **сонаправленными**, если они имеют одинаковые направления.

Например, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{m}$, $\vec{a}\uparrow\uparrow\overrightarrow{KP}$, $\vec{m}\uparrow\uparrow\overrightarrow{KP}$.

Коллинеарные векторы называются **противоположно направленными**, если они имеют разные направления.

Например, $\vec{a}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{KP}$.

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

35. Координаты вектора

Пусть $A(x_1; y_1)$ — начало вектора $\vec{a}$, $B(x_2; y_2)$ — конец вектора $\vec{a}$ (рис. 75).

Координатами вектора $\vec{a}$ называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и обозначают $\vec{a}(a_1; a_2)$.

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами a_1, a_2 равна $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И обратно, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

36. Действия над векторами

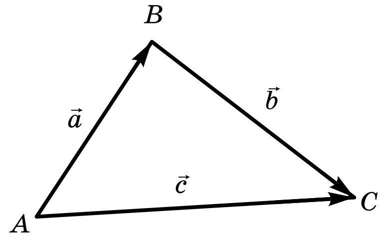


Рис. 77

1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \text{ (правило треугольника),}$$

$$\text{или } \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}.$$

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

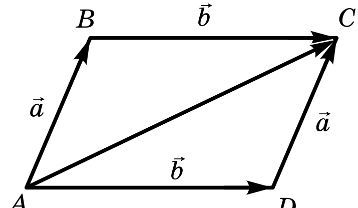


Рис. 78

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

4. **Разностью векторов** $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ называется такой вектор $\vec{c}(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е.

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a} \text{ (рис. 79).}$$

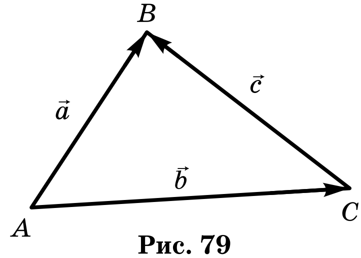


Рис. 79

5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ **на число** $\boldsymbol{k}$ называется вектор $k\vec{a}(ka_1;\ ka_2)$.

Из определения следует, что:

1) *произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;*

2) *для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.*

Основные свойства умножения вектора на число:

1) $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ — *сочетательный* закон;

2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ — *I распределительный* закон;

3) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ — *II распределительный* закон.

37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$

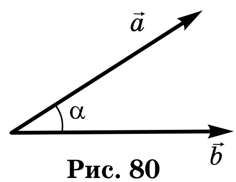


Рис. 80

1) Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\alpha=90^\circ$, $\cos\alpha=0$, тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Верно и обратное: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

2) Если $\alpha<90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$; если $\alpha>90^\circ$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$.

38. Скалярное произведение в координатах

Если $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

Следствие 1. $\vec{a}\perp\vec{b}$ тогда и только тогда, когда $x_1x_2+y_1y_2=0$.

Следствие 2. $\cos\alpha=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$, где α — угол между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$, $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$.

39. Свойства скалярного произведения векторов

1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон);

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон);

4) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон).

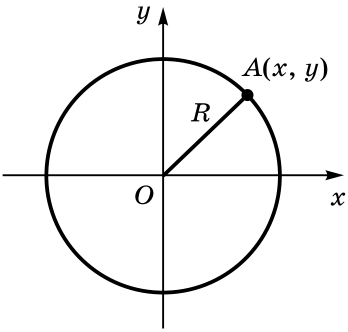


Рис. 81

40. Уравнение окружности

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Если центр окружности $M(x_0; y_0)$, то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

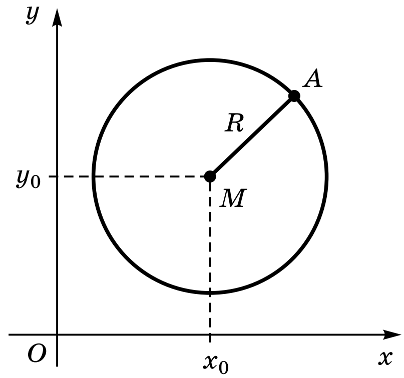


Рис. 82

41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах x и y задается уравнением вида $ax + by + c = 0$, где a и b — коэффициенты при неизвестных, c — свободный член.

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $y = -\dfrac{c}{b}$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox (рис. 83).

3) Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = -\dfrac{c}{a}$ — уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 84).

4) Если $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ax + by = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат (0; 0) (рис. 85).

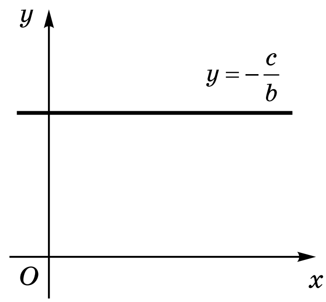


Рис. 83

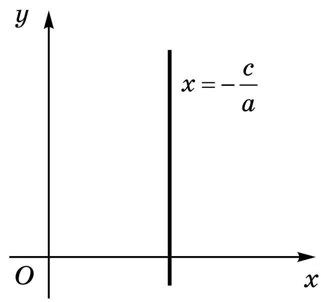


Рис. 84

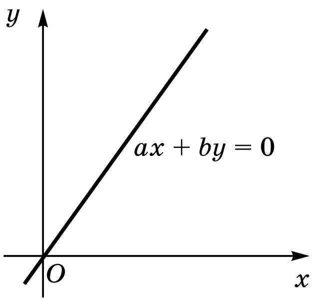


Рис. 85

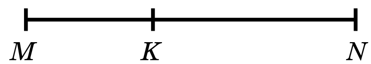
7 КЛАСС

Глава II

Начальные геометрические сведения

§ 1. Измерение отрезков

Пример 1.
$MN = 21$,
$KN - MK = 3$.
MK, KN — ?



Решение.

I способ

Пусть $MK = x$, тогда $KN = x + 3$. По условию $MN = 21$. Но $MN = MK + KN$. Значит, $x + (x + 3) = 21$, $2x + 3 = 21$, $2x = 18$, откуда $x = 9$.

Следовательно, $MK = x = 9$, $KN = x + 3 = 12$.

II способ

Пусть $MK = x$, $KN = y$. Так как $KN - MK = 3$, то получим $y - x = 3$. По условию $MN = 21$, или $x + y = 21$. Имеем систему уравнений:

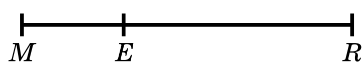
$$\begin{cases} x + y = 21, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Складывая и вычитая левые и правые части уравнений системы, находим

$$\begin{cases} 2y = 21 + 3, \\ 2x = 21 - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 24, \\ 2x = 18; \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 12, \\ x = 9. \end{matrix}$$

Ответ: $MK = 9$, $KN = 12$.

Пример 2.
$MR = 24$,
$ER = 3ME$.
ME, ER — ?



Решение.

Пусть $ME = x$, тогда $ER = 3x$. Так как $MR = 24$ и $MR = ME + ER$, то получим уравнение $x + 3x = 24$, или $4x = 24$, $x = 6$. Значит, $ME = 6$, $ER = 6 \cdot 3 = 18$.

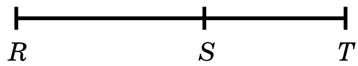
Ответ: $ME = 6$, $ER = 18$.

Пример 3.

$RT = 30$,

$\frac{1}{2}ST = \frac{1}{3}RS$.

RS, ST — ?



Решение.

Если $\frac{1}{2}ST = \frac{1}{3}RS$, то $3ST = 2RS$. По условию $RT = 30$. Но $RT = RS + ST$. Пусть $RS = x$, $ST = y$, тогда получим систему уравнений: $\begin{cases} 2x = 3y, \\ x + y = 30. \end{cases}$

Из второго уравнения $x = 30 - y$, тогда первое уравнение системы примет вид $2(30 - y) = 3y$, или $60 - 2y = 3y$, $5y = 60$, откуда $y = 12$, тогда $x = 30 - 12 = 18$.

Значит, $RS = 18$, $ST = 12$.

Ответ: $RS = 18$, $ST = 12$.

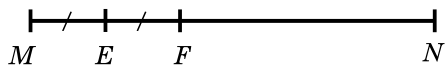
Пример 4.

$MN = 25$,

E — середина MF,

$MF : FN = 2 : 3$.

FN — ?



Решение.

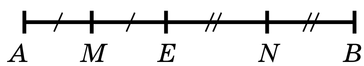
Пусть $MF = 2x$, тогда $FN = 3x$. Так как $MN = 25$, то получим уравнение $2x + 3x = 25$, $5x = 25$, $x = 5$. Значит, $MF = 2x = 10$, тогда $FN = MN - MF = 25 - 10 = 15$.

Ответ: $FN = 15$.

Пример 5.

$MN = 13$.

AB — ?



Решение.

Пусть $AM = ME = x$, $EN = NB = y$. По условию $MN = 13$, тогда получим $x + y = 13$. Но $AB = AE + EB = 2x + 2y$. Значит, $AB = 2(x + y) = 13 \cdot 2 = 26$.

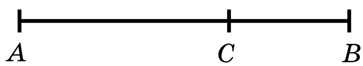
Ответ: $AB = 26$.

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

Группа «А» *Таблица 1*

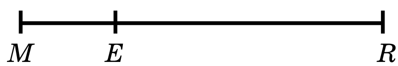
1

$AB = 16$,
$AC - CB = 6$.
AC, CB — ?



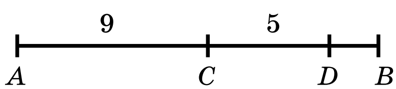
2

$MR = 28$,
$ER = 3ME$.
ME, ER — ?



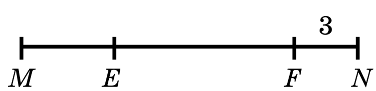
3

$AB = 16$.
DB — ?



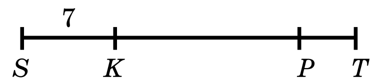
4

$MN = 12$, $EN = 8$.
ME, EF — ?



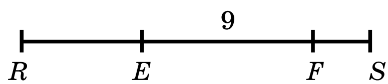
5

$SP = 16$, $KT = 14$.
ST — ?



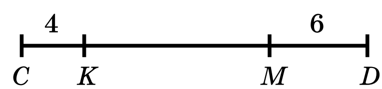
6

$RE + FS = 12$,
$EF + FS = 14$.
RS — ?



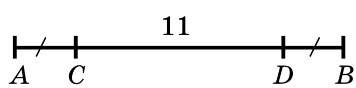
7

$CD = 19$.
KM — ?



8

$AB = 19$.
AD, CB — ?



ОТВЕТЫ

7 класс

Таблица 1 «А»

1. $AC = 11$, $CB = 5$. **2.** $ME = 7$, $ER = 21$. **3.** $DB = 2$. **4.** $ME = 4$, $EF = 5$. **5.** $ST = 21$. **6.** $RS = 21$. **7.** $KM = 9$. **8.** $AD = 15$, $CB = 15$.

Таблица 1 «Б»

1. $RS = 24$, $ST = 16$. **2.** $MK = 5$, $KN = 15$. **3.** $RK = 10$, $SK = 15$. **4.** $EM = 30$, $MF = 6$. **5.** $EF = 7$. **6.** $ME = 7$. **7.** $NR = 13$. **8.** $EM = 8$, $MN = 9$. **9.** $AC = 19$. **10.** $EN = 16$. **11.** $AN = 27$. **12.** $RF = 15$. **13.** $FN = 18$. **14.** $EL = 21$. **15.** $KF = 23$. **16.** $AB = 34$.

Таблица 2 «А»

1. $\angle AOC = 30°$, $\angle BOC = 120°$. **2.** $\angle AOB = 160°$, $\angle BOC = 40°$. **3.** $\angle BOC = 70°$. **4.** $\angle AOB = 75°$, $\angle BOC = 50°$. **5.** $\angle AOB = 90°$, $\angle AOC = 30°$. **6.** $\angle AOB = 150°$, $\angle BOC = 30°$. **7.** $\angle BOD = 80°$, $\angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 40°$. **8.** $\angle BOD = 30°$, $\angle AOD = 90°$.

Таблица 2 «Б»

1. $\angle AOC = 30°$, $\angle BOC = 120°$. **2.** $\angle KOE = 40°$, $\angle MOL = 20°$. **3.** $\angle AOC = 100°$, $\angle BOC = 40°$. **4.** $\angle MOK = 30°$, $\angle NOK = 120°$. **5.** $\angle NOK = 40°$, $\angle MOP = 30°$. **6.** $\angle AOD = 30°$, $\angle COD = 40°$, $\angle BOC = 50°$. **7.** $\angle KOT = 30°$, $\angle TOL = 40°$, $\angle KOL = 70°$. **8.** $\angle EOF = 30°$, $\angle BOF = 60°$, $\angle AOF = 70°$.

Таблица 3 «А»

1. $\angle bc = 120°$, $\angle ac = 60°$. **2.** $\angle mp = 150°$, $\angle pn = 30°$. **3.** $\angle bd = 20°$. **4.** $\angle mk = 60°$. **5.** $\angle mk = 35°$, $\angle mp = 145°$. **6.** $\angle ac = 130°$, $\angle bc = 50°$. **7.** $\angle ml = 150°$, $\angle lk = 30°$. **8.** $\angle ac = 20°$, $\angle bc = 160°$.

Таблица 3 «Б»

1. $\angle MOK = 120°$, $\angle KON = 60°$. **2.** $\angle BOF = 100°$, $\angle BOE = 140°$. **3.** $\angle ac = 30°$, $\angle cd = 75°$. **4.** $\angle km = 140°$, $\angle mn = 20°$. **5.** $\angle AOC = 110°$, $\angle COD = 35°$. **6.** $\angle MOK = 35°$, $\angle KON = 145°$. **7.** $\angle EOF = 100°$. **8.** $\angle EOM = 45°$, $\angle NOF = 45°$. **9.** $\angle COD = 90°$. **10.** $\angle MOK = 90°$, $\angle NOK = 90°$. **11.** $\angle ROF = 120°$, $\angle EOS = 20°$. **12.** $\angle MOC = 70°$, $\angle COK = 35°$. **13.** $\angle FOE = 50°$. **14.** $\angle COM = 60°$. **15.** $\angle TOM = 20°$. **16.** $\angle FON = 54°$, $\angle MOE = 72°$.

Таблица 4 «А»

1. $\angle ab = 35°$, $\angle ab_1 = 145°$, $\angle a_1b = 145$. **2.** $\angle mn = 40°$, $\angle mn_1 = 140°$, $\angle m_1n_1 = 40°$. **3.** $\angle ab_1 = 130°$, $\angle ab = 50°$. **4.** $\angle mn = 20°$, $\angle mn_1 = 160°$. **5.** $\angle ab = 45°$, $\angle a_1b = 135°$. **6.** $\angle 1 = \angle 3 = 25°$, $\angle 2 = \angle 4 = 155°$. **7.** $\angle 1 = \angle 3 = 40°$, $\angle 2 = \angle 4 = 140°$. **8.** $\angle 1 = \angle 3 = 50°$, $\angle 2 = \angle 4 = 130°$. **9.** $\angle 1 = \angle 3 = 140°$, $\angle 2 = \angle 4 = 40°$. **10.** $\angle 1 = 145°$, $\angle 2 = 35°$. **11.** $\angle 1 = 120°$, $\angle 2 = 60°$. **12.** $\angle 1 = 130°$, $\angle 2 = 50°$. **13.** $\angle 1 = 120°$, $\angle 2 = 60°$. **14.** $\angle 1 = 150°$, $\angle 2 = 30°$. **15.** $\angle 1 = 140°$, $\angle 2 = 40°$. **16.** $\angle 1 = 150°$, $\angle 2 = 30°$.

Оглавление

0+

Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

РЕПЕТИТОР ПО ГЕОМЕТРИИ

для 7–9 классов

Ответственный редактор *С.Осташов*

Формат 70×100/16. Бумага тип. № 2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 29,67. Тираж 5000 экз.
Заказ №

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.

Изготовлено в России. Дата изготовления: 11.2023.
Срок годности не ограничен

Отпечатано в ООО «Принт-М»
142300, Россия, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов 1 /
Корпус Производственный Б, помещение 279, этаж 4.